

高等学校学習指導要領解説 数学編 微分・積分の考え

微分と積分の考えについて、数学的活動を通して、その有用性を認識するとともに、次の事項を身に付けることができるよう指導する。

ア 次のような知識及び技能を身に付けること。

(イ) 導関数を用いて関数の値の増減や極大・極小を調べ、グラフの概形をかく方法を理解すること。

イ 次のような思考力、判断力、表現力等を身に付けること。

(ア) 関数とその導関数との関係について考察すること。

(イ) 関数の局所的な変化に着目し、日常の事象や社会の事象などを数学的に捉え、問題を解決したり、解決の過程を振り返って事象の数学的な特徴や他の事象との関係を考察したりすること。

1 単元名 第6章 微分法と積分法（数研出版「改訂版 高等学校 数学Ⅱ」）

2 単元について

(1) 単元観

関数に関しては、数学Ⅰの「2次関数」において、2次関数の値の変化やグラフの特徴について調べ理解を深めている。また、数学Ⅱの「図形と方程式」において、直線を x と y の1次方程式で表し、いくつかの1次方程式の関係を調べることを通して、直線間の関係を考察することなどを行っている。これらの題材では、変数 x と y の1対1の対応に関して、数式を扱いながら考察した。

この単元で扱われる微分法と積分法では、極限という非常に小さな世界に、人間の想像力を働かせながらアプローチし、理論を構築していかなければならない。生徒にとっては、現実とかけ離れた世界の学習内容に感じてしまう単元である。しかし、微分法と積分法は現実世界のありとあらゆる分野で利用され、私たちに恩恵を与えている学問分野である。

ここでは、簡単な多項式で表される関数に限定して、瞬間の速さや面積などの具体的な事象の考察を通して微分と積分の考えを理解し、その考えの有用性を認識できるようにするとともに、微分と積分の考えを活用して問題を解決する力などを養う。

新しく学習する概念や原理・法則などを一方的に提示するのではなく、数学的活動を重視し、既習の知識と関連付け、より深く体系的に理解できるようにすることで、日常の事象や社会の事象などを数学的に捉えて問題解決したり、解決の過程を振り返って事象の数学的な特徴や他の事象との関係を考察したりできるようにする。

(2) 生徒観

この講座は、A高等学校普通科において、主に4年制大学進学を希望する2年生の理系生徒の講座である。

5月の授業観察では、講座の雰囲気は明るく、授業者の質問に対して素直に返答する姿が見られた。一問一答形式の問いには比較的滑らかに答えを返せる一方で、「なぜそうなるのか」や「今の答えは正しいといえるのか」といった、論理的に思考を働かせる必要のある問いへの返答は滑

らかとは言えなかった。

4月に行われた基礎学力診断テストでは、Cゾーン以上の学力を有しており、学習することに困難を感じている生徒は少ない。一方で、模擬試験等の成績を分析すると、その後の学力の伸びに問題を抱えている一面もある。言い換えれば、与えられた課題に対しては素直に取り組み、一定の評価を得ようとする強みを持つ反面、視野を広く持ち、自ら課題を発見し、解決しようとする姿勢は弱く、手立てが必要であることが見て取れる。

これらのことから、本講座の生徒は、ICEモデルにおける「基礎的知識 (Ideas)」習得においては順調な学力を有しているが、「つながり (Connections)」を意識した学びへの到達が不十分であると考えられる。生徒自らが、すでに身につけている基礎的知識と、新たに行う学習活動で得られる知識とのつながりを意識すること、また、「知の応用 (Extensions)」に対する考えを深めることが、前述した弱みに対する手立てになると考えられる。

(3) 指導観

学習指導要領にある数学Ⅱの性格は「高等学校数学の根幹をなす内容で構成し、より多くの生徒の数学的に考える資質・能力を養う」ものであるため、微分法の導入においては、関数の局所的な変化に着目したり、日常の事象を数学的に捉えて問題を解決したり、事象の数学的な特徴や他の事象との関係を考察できるようになるプロセスを経過しながら学習する必要がある。

ここでは、微分法は将来を予測するためのツールの一つであることを理解し、「どのようにすれば微分を活用し、未来を予測することができるか」について考えることとした。教科書の発展問題として取り上げられている題材は、面積や体積の最大値に関する問題であるが、これも言い換えれば、具体的に作ることが困難な実例に対して、数字と文字を用いた数学の世界で、事象の時間的な変容を観察している行為であり、将来予測の例といえる。

「第1節 微分係数と導関数」においては微分法の定義式を学び、3次方程式までの微分の計算を習得している。本節では第1節で習得したことを基礎にし、3次以上の関数のグラフを活用していくことを目標としているが、その過程の中で、微分法計算の上達が、微分法の本質の忘却になることが多くみられる。増減表というグラフの概形を知る上で欠かせないツールの学習において、ワークシートを用いて生徒の考えを視覚化し、実感を伴う理解につなげることが、数学の「見方・考え方」を豊かなものすると考える。

授業で得られる知識や理解によって、微分法の定義が生徒の中で再構築され、活用されていくようになるためには、授業の中で交わされる言葉が知識の一方向的な伝達でなく、つながりや発展を含んだものでなくてはならない。上記のことを踏まえ、検証授業では、生徒の学習活動を主体的・対話的で深い学びにつなげるために、「そもそもなぜ微分法を学ぶのか」ということを学習の到達目標とし、そのプロセスで適切な発問を配置した。生徒と授業者、生徒と生徒が対話を通じ、考え、課題を解決していくような授業展開を目指したい。

3. 単元の目標

微分法・積分法の考えについての基本的な概念や原理・法則を体系的に理解するとともに、事象を数学的に解釈したり数学的に表現・処理したりする技能を身に付けるようにする。

関数の局所的な変化に着目し、日常の事象や社会の事象などを数学的に捉えて問題解決したり、解決の過程を振り返って事象の数学的な特徴や他の事象との関係を考察したりできるようにする。

4. 単元の評価規準

関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	数学的な技能	知識・理解
微分・積分の考え方に関心を持つとともに、具体的な事象の考察に活用し、数学的論拠に基づいて判断しようとしている。	事象を数学的に考察し表現したり、思考の過程を振り返り多面的・発展的に考えたりすることなどを通して、微分・積分における数学的な見方や考え方を身に付けている。	微分積分の考えにおいて、事象を数学的に表現・処理する仕方や推論の方法などの技能を身に付けている。	微分・積分の考えにおける基本的な概念や原理・法則などを体系的に理解し、知識を身に付けている。

5. 指導と評価の計画（全7時間）

<ul style="list-style-type: none"> ・関数の増減と極大・極小（4） ・関数の増減・グラフの応用（3）

項目	時間	○指導のねらい（目標） ・学習内容、学習活動	評価				評価規準	評価方法
			関	考	技	知		
第6章 微分法と積分法 第2節 関数の値の変化	1 (本時)	○ 具体的な事象と接線の傾きを関連付けて考察し、微分係数や導関数の意味について理解する。 ・関数の増減と導関数	◎				導関数を利用することで、3次関数のグラフの概形を知ろうとしている。〔関心・意欲・態度〕	学習プリントの記述観察
	2	○ 極大値・極小値の意味について理解する。 ・関数の極大・極小			◎		導関数を利用して、3次関数のグラフをかくことができる。〔数学的な技能〕	ノート 観察 グループ活動
	3	○ n 次関数のグラフの概形に現れる法則性について予測する。 ・関数の極大・極小		◎		◎	導関数を利用して、簡単な多項式で表される関数グラフをかくことができる。〔数学的な見方や考え方〕	ノート 観察 グループ活動
	4	○ 極大値・極小値を用いて関数を求める。 ・関数の極大・極小			◎		極大値・極小値の性質を理解して活用できる。〔数学的な技能〕	ノート 観察
	5	○ 簡単な多項式で表される関数の最大値・最小値を求める。 ・関数の最大・最小	◎				具体的な事象の考察に微分法を活用し、数学的論拠に基づいて判断しようとしている。〔関心・意欲・態度〕	観察 グループ活動
	6	○ 方程式の実数解の個数を調べる手段として、導関数を利用する。 ・方程式への応用	◎			◎	方程式の実数解の個数の考察に導関数を活用し、数学的論拠に基づいて判断しようとしている。〔関心・意欲・態度〕	ノート 観察

	7	○不等式の証明に導関数を活用する。 ・不等式への応用	◎	◎	不等式の証明に導関数を取り入れて考えることができる。[数学的な見方や考え方]	ノート 観察
--	---	-------------------------------	---	---	--	-----------

6. 本時の指導(1 / 7時間)

(1) 本時の目標

具体的な事象と接線の傾きを関連付けて考察し、微分係数や導関数の意味について理解する。

(2) 本時の評価規準

導関数を利用することで、3次関数のグラフの概形を知ろうとしている。

[関心・意欲・態度] (行動観察)

(3) 研究上の工夫

微分法で得られる学びを通して、「そもそもなぜ微分法を学ぶのか」ということへの理解に迫るように留意し、学習指導案を作成した。

微分法は将来を予測するためのツールの一つであることを理解し、「どのようにすれば微分を活用し、未来を予測することができるか」について考えることを設定し、授業中での発問を考え「ICE Question Sheet (表1)」としてまとめた。

微分法と積分法は、いろいろな事象を数理的に取り扱うのに有用であるため、将来を予測することが微分において学ぶことの全てではない。しかし、汎用性が高いにもかかわらず、実社会とのかかわりに触れずに難解な数式の計算に終始することは、微分法の本質の忘却になる。

数学Ⅱの性格として述べられている「より多くの生徒の数学的に考える資質・能力を養う」ことに寄与できるよう、ジェットコースターの傾きに注目することで、微分法の本質に迫ることのできる展開とした。その際、ワークシートを用いて生徒の考えを視覚化したり、対話を通じて具体的な事象を数学的に再定義していけるよう配慮した。

表1 「関数の増減と極大・極小」の ICE Question Sheet

関数の増減と極大・極小	Ideas	Connections	Extensions
目標 具体的な事象と接線の傾きを関連付けて考察し、微分係数や導関数の意味について理解する。	①傾きがプラスやマイナスの場所でのジェットコースターの状態はどのようになっていますか。 ②ジェットコースターの「傾き具合」を知るだけで、コースの概形を知ることができますか。 ③「傾き」という言葉を数学的な言葉で言い換えるとどのような言葉になりますか。	①グループで話し合っ て起伏を決定するポイントについて検討してみよう。 ②「傾き具合の変化の様子」という言葉を数学的な言葉で言い換えるとどのような言葉になりますか。	①予測ができることはどのようなことで、どんなことが予測できますか。 ②どのようにすれば微分を活用し、未来を予測することができますか。 ③微分で何ができるのだろうか、その特徴が最も表れている例を用いて説明しなさい。

(4) 準備物

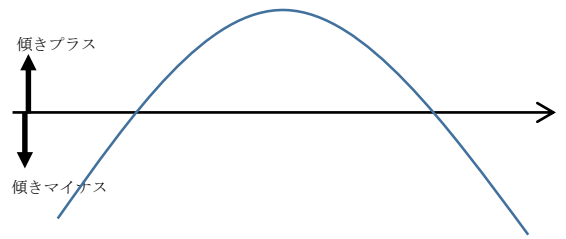
・ワークシート ・ジェットコースターの掲示物 ・振り返りシート ・グループ協議用シート

(5) 学習の展開

	学習活動	指導上の留意点	評価規準 〔観点〕(評価方法)
導入 (5分)	見通し	Pre Extensions 明日起こることは予測できますか。 「できる」と思う人はそれを何に役立てますか。 「できない」と思う人は、 <u>できないということ</u> をできると思っている人に納得させてください。	
	<p>○予測ができることはどのようなことで、どんなことが予測できますか。 E①</p> <ul style="list-style-type: none"> ●できる、天気予報。 ●できる、明日の晩御飯。 ●できる、宝くじを当てる。 ●できる、賭け事に使う。 ●できない、明日にならないと分からない。 ●できない、今までできてないから。 <p>○本時の目標を掲示する。</p>	<p>○微分を学ぶ上での重要なテーマであることを伝える。</p> <p>○正解・不正解が存在する問題ではないことを伝え、いろいろな意見が出やすくなるように支援する。</p> <p>○本時の目標、タイムスケジュールを確認し、学習の見通しを立てさせる。</p>	

展開①
(25分)

問1. 下のグラフはジェットコースターの「傾き具合」をグラフにしたものである。このグラフを見て、ジェットコースターがどのような起伏をもったコースであるか記入してください。



○傾きがプラスやマイナスの場所でのジェットコースターの状態はどのようなになっていますか。 I①

●プラスでは上昇している

●マイナスでは下降している

○ジェットコースターの「傾き具合」を知るだけで、コースの概形を知ることができますか。 I②

○全員が納得できる起伏のスケッチに集約する。

○「傾き」という言葉を数学的な言葉で言い換えるとどのような言葉になりますか。 I③

●(ジェスチャーなど) こんなの。

●何度といった角度のこと

●「 x の増加量」分の「 y の増加量」

●変化の割合

◆「傾き具合」の意味を確認する。

○個人で考えるよう指示する。

◎できていない生徒への補助へあたらせる。

○特徴のある起伏を取り出し、板書させる。

○理由となる意見を発表させる。

○既に学習済みの数学的な用語で表現できないか指示する。

問2. 傾き具合のグラフと実際のコースの起伏との関係を見つけ、その理由を述べなさい。

○グループで話し合って起伏を決定するポイントについて検討してみよう。 C①

○各グループの意見を発表する。

●傾きが負 ⇒ 下降する

●傾きが正 ⇒ 上昇する

●傾きがゼロ ⇒ 水平である

○「傾き具合の変化の様子」という言葉を数学的な言葉で言い換えるとどのような言葉になりますか。 C②

●(ジェスチャーなど) こんなの。

●傾きが変化していく様子

●平均変化率

●導関数

○「傾き具合」とは幾何的な上昇と下降の様子ではなく、代数的に変換された数値の変化であることに注視するように指示する。

○グループで話し合い、グループの意見をまとめさせる。

◎傾き具合のグラフと実際のコースの起伏の関係を数学的な言葉で表現するように考えさせる。

○既に学習済みの数学的な用語で表現できないか指示する。

<p>展開② (10分)</p>		<p>3. 3次関数や4次関数といった高次の関数のグラフをかくにはどのようなことをすればよいと思いますか。</p>	<p>○関数の増減は、導関数の符号と一致することに注目させる。 ◆問2での回答群からグラフの概形をかくうえで必要な情報を選ぶようにさせる。 ◎「ジェットコースターの傾き具合の変化の様子」を別の言葉で置き換えることはできないか考えさせる。</p>	<p>導関数を利用することで、3次関数のグラフ概形を知ろうとしている。[関心・意欲・態度] (学習プリントの記述観察)</p>
<p>終末 (10分)</p>	<p>まとめ</p>	<p>○区間における関数の増減の様子は、導関数の区間における正負に一致する。 $f'(x) > 0 \Rightarrow$ 増加 $f'(x) < 0 \Rightarrow$ 減少 $f'(x) = 0 \Rightarrow$ 定数 ○どのようにすれば微分を活用し、未来を予測することができますか。 E② ●導関数から特徴の表れる区間を調べる。 ●微分して瞬間の様子を調べる。</p>		
	<p>振り返り</p>	<p>○微分で何ができるのだろうか、その特徴が最も表れている例で説明しなさい。 E③ ○本時の学習内容、活動について振り返りシートを用いて振り返る。</p>	<p>○自分自身の理解できたことを具体的に記入するよう指示する。 ○教科書では何ページに記載されている内容であるか探させる。</p>	

(6) 板書計画

今日の目標：微分する目的を探る	発表用スペース 生徒の考えたコース	起伏の理由 ○○○○ ⇒ □□□□ ○○○○ ⇒ □□□□ ○○○○ ⇒ □□□□ ○○○○ ⇒ □□□□	まとめ 微分することで変化の様子を知ることができる。 導関数の正負について観察することで関数の概形を知ることができる。具体的にはある区間で $f'(x) > 0 \Rightarrow$ 増加 $f'(x) < 0 \Rightarrow$ 減少 $f'(x) = 0 \Rightarrow$ 定数
-----------------	----------------------	---	---

【予想される生徒の解答】

問1. 傾きのグラフと同じ形状のコース 変曲点が極大値になっている

問2. 傾きが負 ⇒ 下降する 傾きが正 ⇒ 上昇する 傾きがゼロ ⇒ 水平である
導関数の値が負 ⇒ 下降する 導関数の値が正 ⇒ 上昇する 導関数の値がゼロ ⇒ 水平である