

数学的な見方・考え方を働かせた数学的活動の充実

— What-If-Not戦略とZ.P.D.理論の活用 —

高知大学大学院総合人間自然科学研究科教職実践高度化専攻 指導教官 中野 俊幸
黒潮町立佐賀中学校 教諭 上岡 栄二

【研究の概要】

本研究は、問題解決や問題設定のような数学的活動を中学校数学で効果的に行うために、授業の発展的展開と基本的技能の習熟を統合する授業デザインを考案したものである。S.I.Brown & M.I.Walter の「What-If-Not 戦略」の5水準を応用して授業の学習指導過程に数学的問題設定の文脈を設定するとともに、Vygotsky の「Z.P.D.理論」を応用し、基本的文字計算や式表現を模倣する場面を組織的に設定した。そしてデザインした授業を実践してその有効性と課題を考察したものである。授業実践から、発展的探究過程が、生徒の積極的模倣を促し、効果的な基本的技能の習得と習熟をもたらし、また、その模倣による基本的技能の習熟が、ほとんどの生徒に発展的探究過程に主体的に参加させることにもつながることが実証された。

【キーワード】 What-If-Not戦略 数学的な見方・考え方 Z.P.D.理論 数学的活動

1 はじめに

新しい学習指導要領では、数学的活動を通して数学的に考える資質・能力の育成が求められている。しかし、数学的に考える資質・能力の育成に効果的な数学的活動はどのような活動なのかについては実践的に明確になっていないのが実情である。筆者は、問題を解決する中で数学的な見方・考え方を働かせるような数学的活動が効果的であると考案研究課題を設定した。この課題の探究には、指導法を工夫するだけでなく数学教育学の基礎理論に基づいた教材研究と授業デザインの開発が必要である。本研究は、数学的に考える資質・能力の育成に効果的な数学的活動を授業実践で具体的に示すことがねらいである。

2 研究の目的

数学的活動を充実させるために、問題を発展させることで数学的な見方・考え方を働かせるような授業デザインを考案することが本研究の目的である。本研究では、What-If-Not 戦略を活用し問題づくりをさせ、それに Z.P.D.理論を統合してすべての生徒に数学的な見方・考え方を働かせるような授業デザインを考案することとした。

3 教材研究と授業デザインのための基礎理論

(1) What-If-Not 戦略について

S.I.Brown & M.I.Walter は、問題を設定することは、問題を解決する以上に教育的に重要であると主張し、問題設定を効果的に行うための技術、つまり問題設定の戦略（方略）を考案している。それは、次の5つの水準からなっている(Brown & Walter 1990)。

- | | | | | |
|--------|-------------|--------|--------|----------|
| 【第0水準】 | 出発点を選ぶ | 【第Ⅲ水準】 | 問いをつくる | あるいは問題設定 |
| 【第Ⅰ水準】 | 属性の目録づくり | 【第Ⅳ水準】 | 問題分析 | |
| 【第Ⅱ水準】 | What-If-Not | | | |

【第0水準】の出発点を選ぶとは、これから生徒に問題を発展させたり、問題を作らせたりするための原問題や原命題などを選択する水準である。実際の授業では、元になる問題を教師が提示し、それを生徒が解く段階になる。

【第I水準】の属性の目録づくりとは、原問題の属性を挙げることで、つまり、原問題を構成する様々な要素や性質を生徒に挙げさせる水準である。その際、分かりきった条件や当たり前の性質など、採り上げるに値しない属性も無視せずに列挙することが重要である。そのことについて Brown は「自明なものや無関係、無意味と思われるものなども挙げておくことが価値ある研究を導きうる」と主張している (Brown 1984)。問題の属性を列挙し改めて意識させることは、問題を問題として成立させている前提条件や問題状況を明らかにしていくことに繋がり、そこから新しい問題意識が生まれるからである。

【第II水準】は、【第I水準】で挙げた各属性に対して「そうでなければ、それはどうなるか (“What if not~?”)」と問うことである。つまり、原問題の条件や性質を意識的に否定することによって、属性を変形していく水準である。

【第III水準】は、否定によって生成された新しい条件や性質を有する問題状況から、原問題を発展させた新しい問題をつくる水準である。

【第IV水準】は、【第III水準】でつくった新しい問題の中からいくつかを選び、それを解いたり分析したりする水準である。

このような What-If-Not ストラテジーを活用して、中学校数学の具体的問題を原問題として問題づくりの学習指導過程をデザインする。

(2) 発達の最近接領域 (Z.P.D. 理論) について

J.Lave & E.Wenger によれば、Vygotsky の発達の最近接領域 (Zone of Proximal Development; 以下 Z.P.D. と略) の学習理論への解釈には、「外的支援 (Scaffolding) という解釈」「文化的解釈」「集合主義的 (collectivist) あるいは社会レベルの (societal) 見方」の3つの解釈がある。

「外的支援という解釈」

これは、Z.P.D. を「学習者が単独で取り組むときに示す問題解決能力と、より経験を積んだ人に助けられたり、彼らと共同で取り組むときに示す問題解決能力との距離として特徴づけられる」(Lave & Wenger 1997) とする解釈である。

Vygotsky 自身は、子どもが一人でできる・できないによって決定される水準【現下の発達水準】に対し、一人ではできないが他人との協同の中ではできる水準に着目し、今日協同でできることは明日には一人でできるようになることから【明日の発達水準】と呼び、この水準を Z.P.D. としている (柴田 2006)。

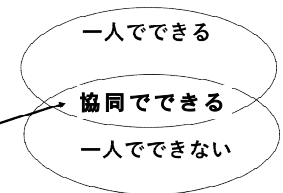


図1 外的支援という解釈

この解釈による学習理論では、模倣が意義付けられ、子ども自身の積極的な内面的活動を促すための教師の先導的役割の必要性や子どもたちの集団的・協同的活動の必要性が主張されることになる。

「文化的解釈」

これは、Z.P.D. を「社会歴史的な文脈によってもたらされる文化的知識—教授によってアクセス可能になる—と、個々人の日常的経験との間の距離」(Lave & Wenger 1997) であるとする解釈である。

Vygotsky 自身は、子どもが生きてきた中で自然に身に付けた概念を【生活的概念】と呼び、また学校教育で意図的に学習する概念を【科学的概念】



図2 文化的解釈

と呼んでおり、【生活的概念】と【科学的概念】との交わりを Z.P.D.としているのである(柴田 2006)。

この解釈による学習理論では、【科学的概念】を学習するときは子どもが【生活的概念】を持っていることを前提にした学習プロセスを研究することになる。

「集合主義的あるいは社会レベルの見方」

これについて、Lave & Wenger は、「エンゲストレイムは最近接発達領域を「個々人の日常的活動と、日常的活動に潜在的に埋め込まれているダブルバインドの解決として集合的に生成され得る、歴史的に新しい形態の社会レベルの活動との距離」と定義している」と解説している(Lave & Wenger 1993)。この解釈による学習理論では、学習を社会的実践と捉え、その葛藤的特性を考慮し、社会的変容(societal transformation)のプロセスを考察の中心的対象とすることになる。

本研究では、上記の3つの解釈のうち、「外的支援という解釈」に着目した。その解釈による学習理論では、教師の先導的役割の必要性和模倣の教育的意義が主張されているからである。子どもの主体的活動を重視する今日の教育界では、教師が先導することや生徒が模範的解法をまねることは、学習方法として肯定的に評価されず、ときには、子どもの主体性や自主性を妨げる指導方法として否定的に評価されているように思われる。しかし、柴田義松が「教育は、模倣が可能なところのみ可能です。」(柴田 2006 p.27)と主張しているように、学校教育の数学授業の実際を省察すると、むしろ、生徒の主体的で積極的な活動を促すためには、教師の先導的役割と生徒の積極的な模倣が必要不可欠と考える。

本研究では、生徒の主体的取り組みが前提となる What-If-Not ストラテジーによる問題づくりの授業展開に、生徒の模倣を組織的に設定することを考察する。

4 What-If-Not ストラテジーを活用した授業のデザインと実践

(1) 連続2整数の平方の差

ア 授業デザイン

右図のような What-If-Not ストラテジーの理論を基にして教材開発及び学習指導について研究を行った。中学校3年生の「式の計算の利用」の題材を基に次のように教材をデザインした。

第0水準：「連続2整数の平方の差がその2数の和になる」

第I水準：「連続した2整数である」

第II水準：「連続した2整数でなければ」

第III水準：「差が2の整数の平方の差は？」

第IV水準：「差が2の2整数の平方の差はその2数の和の2倍になる」

イ 教材開発と授業実践から得られたこと

生徒の思考を発展させる教材を作ることには容易ではないが、What-If-Not ストラテジーの理論を活用したことで教科書の題材を基に生徒の興味関心を引き出す教材を開発することができた。また、What-If-Not ストラテジーの理論は授業を設計する際にも指針となった。また、生徒にとって問題を発展的に作っていくことは、あまり経験したことがなかったと思うが、「差が1でなければ

問題設定方略の段階

- 【第0水準】 出発点を選ぶ = 元問題や定理を定める・提示する
- 【第1水準】 属性目録づくり = 元問題や定理の属性や性質・条件などを挙げる
- 【第II水準】 What-If-Not = 前水準で挙げた属性について「そうでなければどうなるか」
- 【第III水準】 問題の設定 = 属性を変更した新しい問題を設定する
- 【第IV水準】 問題の分析 = 新しい問題を分析し解答を考える

図3 問題設定の方略

2つの自然数の平方の差を考える教材

$2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3$	$3^2 - 1^2 = 9 - 1 = 8$
$3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5$	$4^2 - 2^2 = 16 - 4 = 12$
$4^2 - 3^2 = 16 - 9 = 7$	$5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$
2数の和	2数の和の2倍

図4 2つの自然数の平方の差



図5 2つの自然数の平方の差の板書

ば」(What-If-Not)という問いかけをすることで容易に発展的問題を生徒が主体的に作ることができた。

(2) 五角形の内角の和 (2年生)

ア 授業デザイン

中学校2年生の「多角形の内角の和」の題材を基に、What-If-Not ストラテジーの理論を基にして教材開発及び授業デザインを行った。

第0水準：「五角形の内角の和を求める」

第I水準：「内部に1点をとっている」

第II水準：「内部に1点でなければどうなるか」

第III水準：「2点、3点、…とると三角形の数は？」

第IV水準：「n点とると三角形は $2n+3$ 個できる」

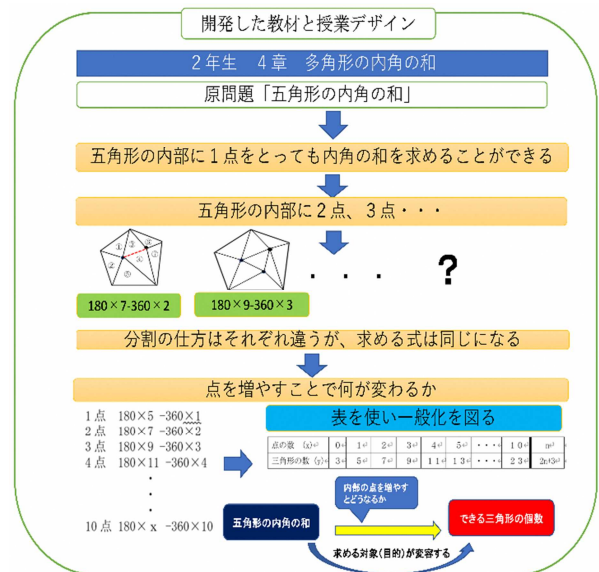


図6 五角形の内角の和の授業デザイン

イ 教材開発と授業実践から得られたこと

五角形の内角の和を求めることを目的にするのであれば対角線を引き3つの三角形に分割する方法と、内部に1点を取り頂点と結んで三角形で分割する方法で十分である。点を2点以上とる必要はない。しかし、五角形の内部に複数の点を取るという発想そのものが、数学的見方であり、その見方を体験させることができたことは教育的に大きな価値がある。また、点の数とできる三角形の数に着目し、その間に関数の関係性を見だし、更に数式で一般化することは数学的な考え方そのものである。

図形の教材でありながら、このような関数的思考を行うことは、数学の領域を超えた学習であり、数学的な見方・考え方を働かせた数学的活動が実現できたと考える。

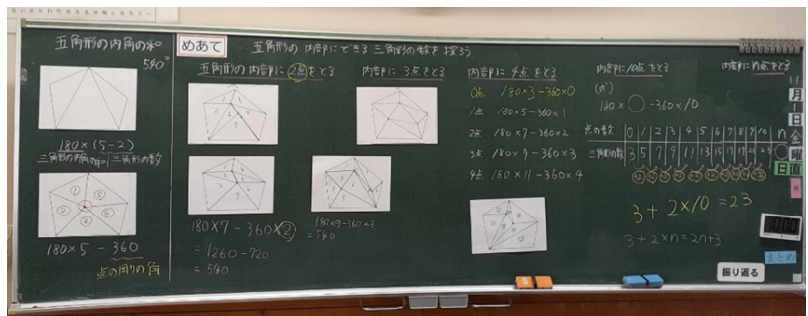


図7 五角形の内角の和の板書

5 What-If-Not ストラテジーと Z.P.D. の理論を統合した授業のデザインと実践

(1) 題材について (線分上にできる複数の半円の弧の長さの和)

本研究の授業デザインで扱った題材は、中学校3年生の「多項式」の単元の教科書に記載されている右のような問題である。本授業では Z.P.D.理論の外的支援の考えと What-If-Not ストラテジーを基にして授業デザインを行った。

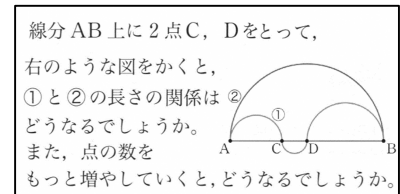


図8 新編新しい数学3 東京書籍

(2) What-If-Not ストラテジー水準の構成

上記の題材に対して、まず What-If-Not ストラテジーの水準を次のように構成した。

【第0水準】

原問題は次のような問題を提示することにした。

ABの中点をCとすると、弧ABと弧AC+弧CBはどちらが長い。

【第I水準】

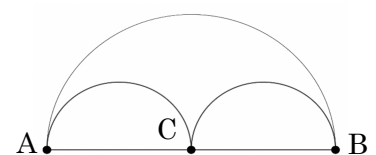


図9 提示した原問題

次のような属性を挙げさせる。

- a. 「点 C は中点である」
- b. 「線分 AB 上に点を 1 個とっている」
- c. 「半円の弧の長さを考えている」

【第Ⅱ水準】

第Ⅰ水準で挙げた属性を次のように否定することによって属性の変形を考えさせる。

- (← a). 「中点でなければどうなるか」
- (← b). 「AB 上に 1 点でなければどうなるか」
- (← c). 「半円でなければどうなるか」

【第Ⅲ水準】

- (～a)₁. 「AC=4、CB=6 ならば半円の弧の長さの和は？」
- (～a)₂. 「AC=3、CB=7 ならば半円の弧の長さの和は？」
- (～a)₃. 「AC=a、CB=b ならば半円の弧の長さの和は？」
- (～b)₁. 「2 点とると半円の弧の長さの和は？」
- (～b)₂. 「3 点とると半円の弧の長さの和は？」
- (～b)₃. 「n 分割すると半円の弧の長さの和は？」
- (～c)₁. 「正三角形ならば周の長さは？」
- (～c)₂. 「正方形ならば周の長さは？」

【第Ⅳ水準】

(～a)₁、(～a)₂ について 弧 AC+弧 CB は 弧 AB と等しくなることから、点 C の位置を線分 AB 上のどこにとっても変わらないかが問題となり、(～a)₃ の結果、点 C の位置が変化しても 弧 AB=弧 AC+弧 CB となることを証明する。

(～b)₁、(～b)₂ について半円の弧の長さの和は弧 AB と等しくなることから、線分 AB を n 分割した場合の問題(～b)₃ が意識され、n 分割しても半円の弧の長さの和は AB を直径とする半円の弧の長さと同じ(変わらない)になるという予想を、式変形(分配法則及びその逆)の一般化から説明する。

(～c)₁、(～c)₂ から、半円の形を変更し、正三角形・正方形の場合も周の長さの合計は変わらず同様の性質があることを知る。

(3) What-If-Not ストラテジー水準を基にした学習指導過程の構成

導入 (第 0 水準)

導入段階は第 0 水準で、原問題を提示し、どちらが長いかを生徒に予想させる。

展開 1 (第Ⅰ水準)

円周の求め方を確認しながら半円の弧の長さを計算させ、弧 AB=弧 AC+弧 CB になることを確かめさせる。その後、第Ⅰ水準に移り原問題の属性を 3 つ (a.、b.、c.) 挙げさせる。

展開 2 (a. についての第Ⅱ・Ⅲ・Ⅳ水準)

展開 1 で挙げた 3 つの属性のうち a. を選び、第Ⅱ水準として(← a). 「中点でなければどうなるか」と問い、第Ⅲ水準として、まず(～a)₁. 「AC=4、CB=6 ならば半円の弧の長さの和は？」(～a)₂. 「AC=3、CB=7 ならば半円の弧の長さの和は？」と問題設定し、第Ⅳ水準としてどちらも 弧 AC+弧 CB は 弧 AB と等しくなること見つけさせる。そして、点 C の位置を線分 AB 上のどこにとっても変わらないかを問題にし、(～a)₃ の結果、C の位置が変化しても 弧 AB=弧 AC+弧 CB となることを文字式で説明させる。

展開 3 (b. についての第Ⅱ・Ⅲ・Ⅳ水準)

第Ⅰ水準の b. 「線分 AB 上に点を 1 個とっている」を改めて取り上げ、第Ⅱ水準として(←

b). 「AB 上に 1 点でなければどうなるか」と問い、第Ⅲ水準として、まず(～b)₁. 「2 点とると半円の弧の長さの和は？」(～b)₂. 「3 点とると半円の弧の長さの和は？」と問題設定し、第Ⅳ水準としてどちらも半円の弧の長さの和は 弧 AB と等しくなることから、線分 AB を n 分割した場合の問題(～b)₃ が意識され、n 分割しても半円の弧の長さの和は AB を直径とする半円の弧の長さと同じ(変わらない)になるという予想を式変形(分配法則及びその逆)の一般化から説明できることを理解させる。

まとめと発展 (c. についての第Ⅱ・Ⅲ・Ⅳ水準)

半円の弧の長さの和について、直径 AB 上のどこに何点とって半円を作ってもその和は変わらず、弧 AB に等しくなることをまとめ、第Ⅰ水準の c. 「半円の弧の長さを考えている」を最後に取り上げ、第Ⅱ水準として (一 c). 「半円でなければどうなるか」と問い、第Ⅲ水準として(～c)₁. 「正三角形ならば周の長さは？」(～c)₂. 「正方形ならば周の長さは？」と問題設定し、図のみを提示して、この解決は本授業では扱わない。興味をもった生徒への自主的課題として提示する。

(4) Z.P.D. 理論を活用した模倣活動の設定

文字式による数学的説明方法について模倣を中心とする Z.P.D. を次のような 3 つの段階で設定した。

ア 文字式による数学的説明方法の理解

まず展開 1 の原問題を解く段階では、半円の弧を π を使って表したり 2 つの半円の弧の和を文字式で表したりする方法は、教師が先導し、適宜生徒に要点を問いながら板書して模範を示す。多くの生徒はこれを書き写すことによって理解し、文字式による数学的説明方法を習得することになる。

イ 具体的数値の記述方法の模倣

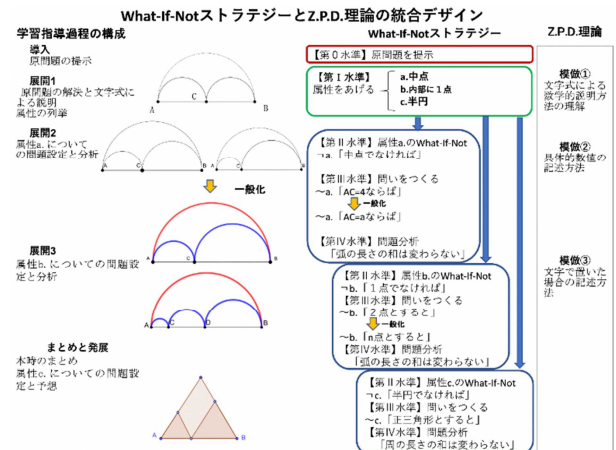
次に展開 2 で点 C の位置が変化しても 弧 AB = 弧 AC + 弧 CB となることを説明する段階で、(～a)₁.、(～a)₂. の具体的数値の場合は、多くの生徒は原問題に対して教師が示した記述方法を模倣しながら次第に一人で記述できるようにさせる。(～a)₃. の AC = a、CB = b と文字で置く場合は、具体的数値の場合の一般化と捉えて記述できた生徒を指名し、前に板書させる。そして、まだできていない生徒にはその板書を理解させるように促す。

ウ 文字で置いた場合の記述方法の模倣

そして展開 3 で(～b)₁. (～b)₂. の 3 分割・4 分割の場合は、展開 2 での 2 分割での(～a)₃. の AC = a、CB = b の文字で置いた場合を模倣して一人で自主的に記述できるようにする。

(5) What-If-Not ストラテジーと Z.P.D. の理論を統合した授業デザイン

2 つの理論を統合した授業デザインは図 10 の通りである。



(6) 授業実践と学習指導の実際

ア 対象と実施時期

対象クラス：高知県公立中学校
3 年生 23 名

実施時期：令和 2 年 6 月初旬

イ 授業の実際の状況

実際の授業は、上述の学習指導過程と大きく

外れることはなかった。ただし、最後のまとめと発展の段階で三角形の場合については教師から図を示し、発展的な探究を促すことができたが、 $(\sim c)_2$ の正方形の場合については提示できなかった。

(7) What-If-Not ストラテジーと Z.P.D. 理論の統合デザインの成果と課題

ア 発展的探究過程に模倣の場面を設定したことによる技能習得の教育効果

中学校数学においては、基礎的知識や基本的技能を習得させるときは次のような教育方法で行うのが一般的である。まず、教師が模範的な解法を板書して提示し、その後、教科書にある類似の練習問題を解くように指示し、生徒に教師の模範的な解法を模倣させて習熟を図る方法である。しかし、特に数学の苦手な生徒は、類似問題では積極的に模倣しようとする意欲をもたせられないことが多い。

本授業では、What-If-Not ストラテジーによって新しくつくった発展的問題に取り組みさせたことで、生徒は意欲的に模倣を行った。原問題の解法さえ写して解答をつくろうともしなかった生徒も展開2の「中点でなければ」を考えるとときには積極的に写すようになり、展開2の点Cの位置を一般化した場合は、具体的数値の場合を模倣しながら自ら記述を完成できるようになった。さらに、線分AB上の点を3点にした展開3の段階で、指名して記述を板書させた生徒は普段は数学がかなり苦手な生徒であった。このように、What-If-Not ストラテジーを活用した発展的授業展開過程に模倣の場面を設定したことにより、技能習得を効果的に行うことができた。

イ 模倣を発展的探究活動の過程に組織的に設定する意義

一般に数学では、基礎的知識や基本的技能に十分習熟できていなければ、応用問題や発展問題に取り組むことは難しく、数学が苦手な生徒を発展的な探究活動に参加させることは難しいと考えられている。実際に、探究的な授業を行うと、数学の苦手な生徒は、無気力になり授業にほとんど参加していないことが多い。しかし本時は、数学が苦手な生徒も原問題の解法を模倣することで参加できる場面を設定できた。What-If-Not ストラテジーの水準Iで属性を挙げる場面ではむしろ数学が苦手な生徒ほど「こぶが2つ」「2分している」「曲線だ」のような数学的に価値あるおもしろい属性を積極的に挙げてくれた。生徒が挙げた属性を「そうでなければ～」(What-If-Not)と否定して新しい問題に取り組んだことで、苦手な生徒も積極的に模倣し、それによって技能を高めることができ、結果的には最後まで探究活動に参加させることができた。このように模倣を探究活動の過程に組織的に設定したことで、数学が苦手な生徒も含め、ほとんどの生徒が積極的に探究活動を行うことができた。このように探究的問題設定の学習指導過程において模倣が生徒の主体的活動を支えることが示され、模倣の教育的意義が実践的に示された。

ウ 式の意義の理解と数学のおもしろさの感得・数学観の変容

授業後の感想から、線分AB上の点を動かしても複数の半円の弧の長さの和は弧ABと等しくなることに驚いたという感想が多くあり、「点の数を増やし形を変えても式で説明できることが分かった。」という意見も多くみられた。これは本授業によって、数学のおもしろさや中学校数学の重要な教育目的である『式変形で説明する』ことの意義を理解させることができたことを示していると考えられる。

また、問題づくりに対して消極的な意見は見られず、さらに、授業時間外に $(\sim c)_1 \cdot (\sim c)_2$ の問題を解いてきた生徒もあり、問題づくりに対する興味関心を高めることができた。問題づくりを通して、数学の問題は教師から一方的に与えられるも

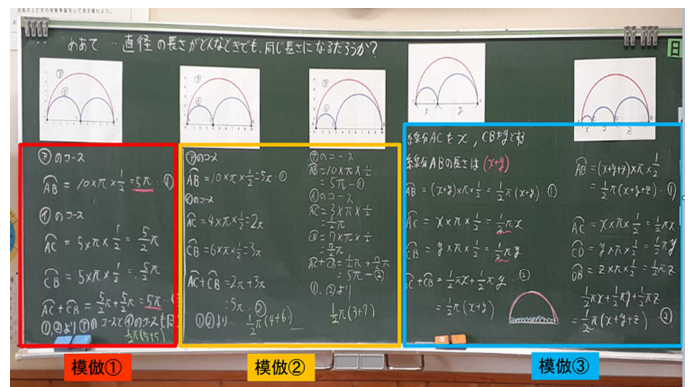


図 11 多項式の板書

のではなく、自身でいろいろと変えていいのだと捉えさせることができたことは大きな成果であったと考えている。

エ 属性を選択することの必要性和その課題

本時の授業の展開1 (What-If-Not 水準 I) で原問題の属性としては、3つの属性を取り上げた。しかし、実際は「長さでなければ(面積ならば)」「円ならば」「点Cが線分AB上になければ」なども考えられ、実際に想定していない属性が挙げられる可能性もある。しかし、第III水準で学習目標や学習過程の構成からみて、指導上価値ある問題を設定しなければいけないので、挙げられた属性をすべて取り上げるわけにはいかない。特に模倣を設定しようとする、解法が模倣する価値があり、模倣できるような問題を設定しなければいけない。したがって、どのような属性を取り上げるかを授業デザインするとき、事前に教材研究をするときの中心的な課題になる。また、あらかじめ属性の選択を決めておくことは、第I水準で生徒に自由に属性を挙げさせることを制限してしまうことにも繋がりがかねない。これが、What-If-Not ストラテジーを活用するときの課題であるといえる。

6 数学教育学の基礎理論に基づいた授業デザインの有効性と今後の課題について

(1) アンケート調査からの考察

表1 数学のおもしろさに関する調査結果(全校生徒)

数学のおもしろさに関する調査結果(対象:全校生徒55名 実施:54名)			2020.6月		2020.11月	
観点	質問内容		平均値	標準偏差	平均値	標準偏差
創造性・発見性	A21	自分の考え出したことが、問題を解決するのに役立つとき	4.13	1.05	4.26	0.89
	A22	習った事柄によって、さらに新しいことがわかったとき	4.07	1.09	4.15	0.95
	A23	自分で新しい問題を作るとき	3.29	1.09	3.70	1.00
	A24	自分の解き方とは別の解き方や考え方が見つかったとき	3.89	1.10	3.98	0.73

授業の事前事後に行った『数学のおもしろさに関するアンケート調査【5件法】(実施時期:6月、11月、対象:全校生徒55名)』では、

表2 数学のおもしろさに関するt検定結果(全校生徒)

観点	質問内容		平均値	標準偏差	t値
創造性・発見性	A23	自分で新しい問題を作るとき	6月	3.29	1.09
			11月	3.70	1.00

* $p < .05$

創造性・発見性の観点における生徒の向上が大きく、特に「自分で新しい問題を作るとき」の項目が大きく上昇し有意な差がみられた。このことから2つの理論を統合した授業デザインの有効性を実証することができた。

(2) 今後の課題

What-If-Not ストラテジーの理論は、教材開発と授業デザインに有効であるだけでなく、「～でなければどうなるか」と生徒に問うことで、数学的な見方・考え方の育成につながるものが実践から明らかになった。今回の実践だけの問題づくりの体験に終わらせては十分な教育効果は期待できない。複数の単元や異なる学年で授業デザインを行い実践していくことを今後の課題としたい。

引用・参考文献

- 柴田義松(2006).『ヴィゴツキー入門』,子どもの未来社
 中村和夫(1998).『ヴィゴツキーの発達論』,東京大学出版会
 藤井斉亮 他(2016).『新編 新しい数学3』,東京書籍
 Brown,S.I.,& Walter.M.I.(1990).平林一榮(監訳).『いかにして問題をつくるかー問題設定の技術ー』,東洋館出版社
 Brown,S.I.(1984).”The Logic of Problem Generation:From Morality and Solving to De-Posing and Rebellion”, *for the Learning of Mathematics*,Vol.4,no.1,pp.9-20.
 Engestrom,Y.(1999).山住勝広 他(訳).『拡張による学習』,新曜社
 Lave,J.,& Wenger,E.(1993).佐伯胖(訳).『状況に詰め込まれた学習』,産業図書